Développement : Connexité des valeurs d'adhérences d'une suite.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématiques

Énoncé :

Théorème 1 : Soient (X, d) un espace compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est un connexe de X.

Application 2 : Soient $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $x_0 \in [0,1]$ et qui vérifie de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Alors la suite (x_n) converge.

On rappelle deux théorèmes avant utile dans la démonstration :
Théorème 3 : Soit K un compact d'un espace métrique (X, d) et $x \in X$. Alors la distance de x à K est atteinte.

Théorème 4 : Soient K un compact et F un fermé d'un espace métrique (X, d) qui sont disjoints. Alors $d(K, F) > 0$.

Résolution :

Démonstration (Théorème) : On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n), qui est fermé car $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n | n \geq p\}}$. Supposons par l'absurde que Γ ne soit pas connexe, alors il existe A et B deux parties fermées de Γ non vide et disjointes telles que $\Gamma = A \cup B$. Comme A et B sont fermées dans un compact, alors A et B sont des parties compactes de Γ. Comme A et B sont deux parties disjointes on en déduit d'après le Théorème 4 que $d(A, B) > 0$. On note $\alpha := d(A, B)$. On définit les parties A' et B' de X par

$$A' := \{x \in X, d(x, A) < \alpha/3\} = \bigcup_{a\in A} B(a, \alpha/3).$$

$$B' := \{x \in X, d(x, B) < \alpha/3\} = \bigcup_{b\in B} B(b, \alpha/3).$$

On pose $K := X \setminus (A' \bigcup B')$. Or A' et B' sont ouverts comme réunion d'ouverts. On en déduit que K est fermé comme complémentaire d'un ouvert. En tant que fermé du compact X, K est donc compact.
Pour obtenir une contradiction on va construire une sous-suite de (x_n) dans K qui admettra alors une valeur d'adhérence dans K. Comme Γ et K sont disjoints par construction de K, on aura ainsi obtenu une valeur d'adhérence qui n'est pas dans Γ, ce qui aboutira à une contradiction.

Comme $d(x_{n+1}, x_n) \leftarrow 0$ lorsque $n \leftarrow +\infty$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N, d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha/3$. Comme les parties A et B sont non vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$. Or par définition de valeur d'adhérence, il existe $n_0 > N$ tel que $d(a, x_{n_0}) < \alpha/3$. Ainsi $x_{n_0} \in A'$. De même il existe $n_2 > n_0$ tel que $d(b, x_{n_2}) < \alpha/3$. Donc $x_{n_2} \in B'$.
Supposons par l'absurde que $x_{n_2} \in A'$. Alors par construction de A', il existe $a' \in A$ tel que $d(a', x_{n_2}) < \alpha/3$ et alors $d(a', b) \leq d(a', x_{n_2}) + d(x_{n_2}, b) < 2\alpha/3$ ce qui est exclu par définition de $\alpha = d(A, B)$. On en déduit que $x_{n_2} \notin A'$.
L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } x_n \notin A'\}$ est non vide, car contient n_2, et admet donc un plus petit élément noté n_1. Ainsi, n_1 vérifie $n_1 \geq n_0$,$x_{n_1} \notin A'$ et $x_{n_1-1} \in A'$.
Supposons par l'absurde que $x_{n_1} \in B'$. Comme pour A', il existe alors $b' \in B$ tel que $d(x_{n_1}, b') < \alpha/3$. Comme $x_{n_1-1} \in A'$, il existe $a' \in A$ tel que $d(x_{n_1-1}, a') < \alpha/3$. Donc par inégalité triangulaire on obtiendrait :

$$d(a', b') \leq d(a', x_{n_1-1}) + d(x_{n_1-1}, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, b') < \alpha$$

On a $d(x_{n_1-1}, x_{n_1}) < \alpha/3$ car $n_1 \geq n_0 > N$.
Comme c'est impossible par minimalité de α, on en déduit que $x_{n_1} \notin B'$. Ainsi, $x_{n_1} \in K$. En répétant ce procédé à partir de n_1, on peut créer un indice $n_1' > n_1$ tel que $x_{n_1'} \in K$ et ainsi une sous-suite de (x_n) incluse K. Comme K est compact, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence dans K ce qui contredit la définition de K.
On en conclut que Γ est connexe. $\square$

Application : On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n).
Comme $[0, 1]$ est une partie compact de $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème précédent, Γ est un connexe de $\mathbb{R}$ et est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. De plus, il est fermé.
L'ensemble Γ est inclus dans l'ensemble des points fixes de f que l'on note $Fix(f) := \{a \in [0, 1], f(a) = a\}$. En effet $a \in \Gamma$, alors il existe une extraction φ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = a$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$ car f est continue. On en déduit que $a = f(a)$ et que $a \in Fix(f)$.
Supposons par l'absurde que la suite (x_n) ne converge pas. Comme elle est bornée, car dans $[0, 1]$n alors elle possède au moins une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Si elle ne possédait qu'une seule valeur d'adhérence alors elle convergerait. Comme ce n'est pas le cas, l'ensemble Γ contient au moins deux points. Par connexité de Γ, il existe $c \in \Gamma$ et $h > 0$ tels que $[c - h, c + h] \subset \Gamma$. Comme $c \in \Gamma$, il existe $N \geq 0$ tel que $|x_N - c| \leq h/2$ et ainsi $x_N \in \Gamma$. On en conclut que $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ pour tout $n \geq N$ et donc la suite (x_n) est stationnaire à un certain rang ce qui est absurde.
On en déduit que la suite (x_n) est convergente.

> L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ est importante car sinon le théorème est faux, comme le montre le cas ou $f(x) = 1 - x$ et $x_0 = 0$.